Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

Условный экстремум. Отыскание экстремальных значений

методические указания

Т. П. Дубова, О. Л. Семенова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2021

Данное пособие посвящено двум тесно связанным задачам дифференциального исчисления функции нескольких переменных: задаче о локальном условном экстремуме и задаче о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции на множестве (а также отыскания супремума и инфимума функции). Помимо основного инструмента решения таких задач — метода Лагранжа — обсуждаются некоторые приемы, используемые при решении как первой, так и второй задачи. В связи с этим отдельные задачи, приведенные в данном пособии, снабжены несколькими вариантами решения. В пособии, помимо других примеров, подробно разобрано решение задачи об исследовании на условный экстремум функции пяти вещественных переменных при трех уравнениях связи (доказано, что при заданных условиях у заданной функции всего 110 стационарных точек, из них 20 точек условного максимума, 30 точек условного минимума и 60 седловых точек). В заключительной части пособия приведено несколько задач для самостоятельной работы, а далее — навигатор по тексту (содержащий перечень основных обсуждаемых утверждений, определений и задач с решениями).

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, множество $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f, \Phi_1, \ldots, \Phi_m : O \to \mathbb{R}$, $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, и

$$E = \{x \in O \ : \ \Phi(x) = \mathbf{0}_m\}.$$

Предположим, что точка $a \in E$ является точкой экстремума (минимума или максимума, строгого минимума или строгого максимума) сужения функции f на множество E. Тогда точка a называется точкой ***условного*** (или относительного) ***экстремума*** функции f соответствующего типа ***при условии связи***

$$\Phi(x) = \mathbf{0}_m. \tag{1}$$

Векторное равенство (1) в скалярной форме записывается в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

называемых ***уравнениями связи***; функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ мы будем называть ***функциями связи***.

Задача исследования функции на условный экстремум заключается в нахождении всех точек условного экстремума заданной функции при заданном условии (наборе условий) и определения типа экстремума в данных точках. Основной и достаточно универсальный метод решения задачи исследования функции на условный экстремум — это метод Лагранжа, о котором речь пойдет ниже. Однако при использовании метода Лагранжа, особенно в части применения достаточного условия условного экстремума, возникают довольно объемные вычисления. В некоторых ситуациях избежать применения метода Лагранжа позволяет редукция числа переменных. Прием редукции применим в тех случаях, когда система уравнений связи позволяет относительно легко выразить в точках заданного множества исследуемую функцию как функцию от меньшего числа переменных. Например, если система (2) сравнительно легко разрешается относительно m переменных, то задача об условном экстремуме сводится к задаче о безусловном экстремуме. Более подробно:

Замечание 1. Предположим, что существует множество $U \subseteq \mathbb{R}^k$, где $k = n-m$, и такое непрерывное отображение $g : U \to \mathbb{R}^m$, что уравнение (1) в O равносильно уравнению $\bar{\bar{x}} = g(\bar{x})$ в U, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\bar{\bar{x}} = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Тогда, если точка $(\bar{a}, \bar{\bar{a}})$ является точкой условного экстремума для $f(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$, то точка $\bar{a}$ является точкой (безусловного) экстремума того же типа (макисмума или минимума) для $\tilde{f}(\bar{x}) \equiv f(\bar{x}, g(\bar{x}))$.

Как показывает следующий пример, даже если система уравнений связи "не слишком хорошо" разрешается явно (как например, в случае, когда функции связи четным образом зависят от каждой переменной), в некоторых случаях уменьшение числа переменных исследуемой функции на заданном множестве возможно.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = 4x^2 - 5y^2$ при условии $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

Решение. Данная функция легко анализируется и без дифференцирования: $f(x,y)\Big|_{\{x^2+\frac{y^2}{4}=1\}} = 4x^2 - 5y^2\Big|_{\{y^2=4(1-x^2)\}} = 24x^2 - 20 = g(x)$, т.е. на эллипсе $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ исследуемая функция выражается через функцию одной переменной x, заданную на проекции эллипса на ось Ox, т.е. на отрезке $[-1; 1]$. Ясно, что g имеет строгие максимумы в точках ± 1 и строгий минимум в точке $x = 0$. Тогда f имеет условный экстремум в соответствующих точках эллипса: строгий условный минимум в точках $(0, \pm 2)$, строгий условный максимум в точках $(\pm 1, 0)$.

Как уже отмечалось, редукция числа переменных удобна не всегда. Основной инструмент решения задач об условном экстремуме — это метод Лагранжа. Данный метод заключаются в том, что сначала с помощью необходимого условия условного экстремума — условия стационарности функции Лагранжа — находят подозрительные на условный экстремум точки (точки, в которых выполняется это условие), а затем классифицируют такие точки (для каждой точки устанавливается либо тип экстремума в этой точке, либо отсутствие экстремума). Для классификации точек используется:
— достаточное условие условного экстремума),
— какие-либо оценки значений функции в окрестности подозрительных точек,
— достаточное условие глобального экстремума на компакте (в тех случаях когда множество является компактом).

Необходимое условие условного экстремума. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, множество O открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(O)$, $\Phi \in C^1(O \to \mathbb{R}^m)$, $\operatorname{rang} \Phi'(a) = m$ (то есть ранг в точке a максимален). Если точка a является точкой условного экстремума функции f при условии (1), то в точке a градиент функции f представим в виде линейной комбинации градиентов функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$. Иначе говоря, существуют вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, такие что*

$$\nabla_a f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla_a \Phi_i. \tag{3}$$

(Данную формулировку необходимого условия условного экстремума, а также доказательство, можно найти в [4] и [3]).

В частности, если $m = 1$, т.е. когда переменные на множестве E связывает лишь одно скалярное уравнение $\Phi(x) = 0$, и в точке условного экстремума оба

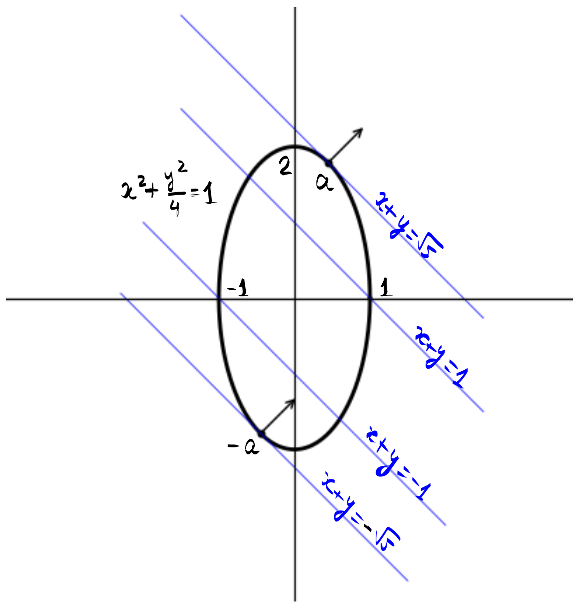

Рис. 1. В точках условного экстремума $\pm a = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ функции $f(x,y) = x+y$ при условии $x^2+\frac{y^2}{4} = 1$ градиент условной функции $\Phi(x,y) = x^2+\frac{y^2}{4}-1$ коллинеарен градиенту функции $f(x,y)$, т.е. линии уровня $\{x+y=C\}$ функции $f(x,y) = x+y$ в этих точках касаются эллипса.

градиента — и исследуемой функции, и функции связи — ненулевые векторы, то они коллинеарны, т.е. множество E и множество уровня $\{x : f(x) = f(a)\}$ функции f, которые в силу невырожденности градиентов локально представляют собой $n-1$-мерные поверхности, в точке a касаются друг друга (имеют общее касательное пространство, см. рис.1).

Для практического использования обычно используют формулировку необходимого условия, связанную с понятием функции Лагранжа.

Функцией Лагранжа (отвечающей функции $f(x)$ и системе связи (2)) называют выражение $f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \Phi_i(x)$. В одних ситуациях данное выражение удобно рассматривать как функцию $n+m$ скалярных переменных $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, а в других ситуациях удобнее считать, что переменными функции Лагранжа как и исходной функции f являются $(x_1, \ldots, x_n)$, а числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, называемые ***множителями Лагранжа***, при этом рассматривают как параметры. В связи с этим формально определим две функции Лагранжа для $x \in O$ и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathfrak{L}(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \Phi_i(x), \tag{4}$$

и

$$L(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \Phi_i(x). \tag{5}$$

Различие между функциями $\mathfrak{L}(x,\lambda)$ и $L(x)$ проявляется при дифференцировании: дифференциалы (различных порядков) функции $\mathfrak{L}(x,\lambda)$ выражаются через дифференциалы всех ее переменных, т.е. $dx_1, \ldots, dx_n, d\lambda_1, \ldots, d\lambda_m$, а дифференциалы функции $L(x)$ — только через $dx_1, \ldots, dx_n$.

Замечание 2. В приведенных ниже условиях условного экстремума — как в необходимом, так и в достаточном — фигурируют значения производных функции Лагранжа, а не значения самой этой функции. Значения производных $\frac{\partial L}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n}$ не изменятся, если в определении функции Лагранжа (5) функции связи $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ заменить функциями $\Phi_1 - C_1, \ldots, \Phi_m - C_m$, где $C_1, \ldots, C_m$ — постоянные. То есть, при определении функции Лагранжа $L(x)$ можно отбрасывать постоянные слагаемые, входящие в уравнения связи.

Необходимое условие условного экстремума как условие стационарности функции Лагранжа. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, множество O открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(O)$, $\Phi \in C^1(O \to \mathbb{R}^m)$, $\operatorname{rang} \Phi'(a) = m$ (максимален). Если точка a является точкой условного экстремума функции f при условии (1), то найдется вектор $\lambda \in \mathbb{R}^m$, для которого*

$$\nabla_{(a,\lambda)} \mathfrak{L} = \mathbf{0}_{n+m}, \tag{6}$$

Иначе говоря, для данного вектора λ справедлива следующая система уравнений Лагранжа относительно точки a:

$$\begin{cases} \nabla_a L = \mathbf{0}_n, \\ \Phi(a) = \mathbf{0}_m. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) состоит из двух условий: условия стационарности функции Лагранжа L и условия связи. В виде системы $n + m$ скалярных уравнений эта система записывается так:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}(a) = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n}(a) = 0, \\ \Phi_1(a) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(a) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Конечно, не всякая точка, удовлетворяющая необходимому условию условного экстремума, является точкой экстремума. Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума (в данном случае, условного), но не являющиеся точками экстремума, называют ***седловыми*** точками.

Для классификации подозрительных на экстремум точек широко применяется достаточное условие условного экстремума в терминах знакоопределенности второго дифференциала функции Лагранжа. К недостаткам метода относится довольно большой объем вычислений. Мы приводим два его варианта, краткий и подробный. Первый требует меньше вычислений, но он применим для более узкого класса задач. Часто поступают так: сначала пытаются применить краткий вариант достаточного условия, а если не удается, то переходят к подробному варианту.

Достаточное условие условного экстремума (краткий вариант). *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, множество O открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(O)$, $\Phi \in C^2(O \to \mathbb{R}^m)$. Пусть в точке a выполняется необходимое условие условного экстремума, и λ — отвечающий точке a набор множителей Лагранжа (т.е. (a, λ) есть решение системы (6)) и $L(x)$ — функция Лагранжа, отвечающая данному набору λ.*

Тогда, если второй дифференциал

$$d_a^2 L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j$$

как функция переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ является
— положительно определенной квадратичной формой, то точка a является точкой условного минимума функции f при условии (1)*;*
— отрицательно определенной квадратичной формой, то точка a является точкой условного максимума функции f при условии (1)*.*

Краткий вариант достаточного условия условного экстремума представляет собой частный случай подробного варианта достаточного условия.

Обратите внимание, что краткий вариант достаточного условия условного экстремума НЕ ПОЗВОЛЯЕТ ДЕЛАТЬ ВЫВОД ОБ ОТСУТСТВИИ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА в случае, когда второй дифференциал является неопределенной квадратичной формой и даже когда он является полуопределенной формой. В последних случаях для классификации подозрительной на условный экстремум точки может быть полезным следующее:

Достаточное условие условного экстремума (подробный вариант). *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, множество O открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(O)$, $\Phi \in C^2(O \to \mathbb{R}^m)$, Предположим, что в точке a выполняется необходимое условие условного экстремума, λ — отвечающий точке a набор множителей Лагранжа (т.е. (a, λ) есть решение системы* (6)*), и $L(x)$ — функция Лагранжа, отвечающая данному набору λ.*

Тогда, если сужение второго дифференциала на касательное пространство T_a к E в точке a

$$d_a^2 L\Big|_{T_a} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j\Big|_{\{dx_1,\ldots,dx_n \,:\, d_a\Phi = 0_m\}} \tag{9}$$

как функция переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ является
— положительно определенной квадратичной формой, тогда точка a является точкой условного минимума функции f при условии (1)*;*
— отрицательно определенной квадратичной формой, тогда точка a является точкой условного максимума функции f при условии (1)*.*
— неопределенной (знакопеременной) квадратичной формой, тогда точка a является седловой точкой для функции f при условии (1)*.*

(Доказательство достаточного условия условного экстремума в его подробном варианте можно найти в [6] и [4].)

Пояснение. Условие

$$d_a\Phi = \mathbf{0}_m, \tag{10}$$

фигурирующее в (9), не следует путать с условием обращения в ноль в точке a всех частных производных первого порядка отображения Φ. Необходимое условие условного экстремума, предполагаемое выполненным в точке a, требует наличие максимального ранга $\Phi'(a)$, значит, ни один из градиентов $\nabla_a\Phi_1, \ldots, \nabla_a\Phi_m$ не является нулевым вектором. Т.е. условие (10) представляет собой систему уравнений, связывающих дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ переменных на касательном пространстве T_a.

Формально оно может быть получено дифференцированием (вычислением дифференциала) условия связи (1). В скалярной форме условие (10) записывается так:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a)dx_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(a)dx_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1}(a)dx_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n}(a)dx_n = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Замечание 3. В некоторых задачах, где знак сужения d^2L на касательное пространство не определяется без серии преобразований, бывает полезным вычислить значения d^2L на НЕКОТОРЫХ касательных векторах — если окажется, что на двух каких-либо касательных векторах d^2L принимает значения разных знаков, то тем самым будет УСТАНОВЛЕНА неопределенность формы $d^2L\Big|_{T_{\bar{a}}}$ (правда, если значения d^2L на всех пробных векторах будут иметь один знак, то никакого вывода отсюда сделать не получится).

При отыскании глобального экстремума функции на компакте основным инструментом является следующее наблюдение, вытекающее из теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией на компакте наибольшего и наименьшего значений.

Достаточное условие глобального экстремума на компакте. *Пусть K — компакт, $f \in C(K)$, K_* — подмножество K, содержащее все подозрительные на локальный экстремум функции f точки (т.е. всякая точка из $K \setminus K_*$ не является точкой экстремума для $f\Big|_K$). Пусть*

$$M = \max_{K_*} f, \qquad m = \min_{K_*} f,$$

Тогда

$$\max_K f = M, \qquad \min_K f = m,$$

и все точки, где функция принимает значение M, являются точками глобального максимума.

Аналогичное верно для минимума.

В частности, если на множестве подозрительных точек K_* функция принимает всего два значения, M и m, то все точки множества K_* являются точками глобального экстремума, а именно
— максимума, если значение функции в точке равно M;
— минимума, если значение функции в точке равно m.

Замечание 4. Достаточное условие глобального экстремума на компакте полезно также при исследовании функции на (локальный) экстремум — если не для всех, то, по крайней мере, для некоторых подозрительных точек, поскольку всякая точка глобального экстремума является также точкой экстремума локального.

Замечание 5. Предыдущее замечание неприменимо для некомпактного множества отыскания экстремума (для функции $f(x,y) = x + \frac{1}{x} + y$ на $E = \{(x,0)\}_{x\in\mathbb{R}, x\neq 0}$

подозрительными на экстремум точками являются точки $(\pm 1, 0)$, при этом $f(1,0) = 2 > f(-1,0) = -2$, но $(1,0)$ — точка минимума, а $(-1,0)$ — точка максимума.

Пояснение. Достаточное условие глобального экстремума, как и аналогичное условие для функции одной переменной, позволяет при решении задачи отыскания наибольшего и наименьшего значений функции заменить исходное множество K меньшим множеством K_* (если известно, что вне такого множества K_* наибольшее и наименьшее значения достигаться не могут). В случае если на K_* заданная функция принимает лишь конечное множество значений, для завершения решения задачи достаточно сравнить между собой лишь числа набора $f(K_*)$.

При отыскании точек, подозрительных на глобальный экстремум на множестве K, следует учитывать геометрию этого множества: если $K = E$ — множество точек, удовлетворяющих условию (1), то всякая точка глобального экстремума является точкой условного экстремума (относительно (1)).

Если компакт K есть множество решений некоторой системы неравенств, то глобальный экстремум может достигаться в точке x_*, расположенной а) во внутренности K или б) на границе K. При этом в случае а) x_* является точкой безусловного („обычного“) экстремума. В случае б), если граница K задается одним (скалярным) уравнением, то x_* является точкой условного экстремума относительно данного уравнения. Если же граница состоит из участков разной размерности („граней“, „ребер“, „вершин“), то для каждого из этих участков возникает свой набор задающих его уравнений и, соответственно, каждому участку отвечает своя функция Лагранжа.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2-2y} \cdot (2y - x^2 - y^2)$ на компакте E, лежащем в верхней полуплоскости и ограниченном окружностями $S_1 = \{x^2+y^2 = 2\}$, $S_2 = \{x^2+2x+y^2 = 0\}$ и прямой $S_3 = \{x = \sqrt{3}y\}$.

Решение. Заметим, что заданная функция представима в виде композиции $f = g(r(x,y))$, где $g(r) = r(1-r^2)$ — функция одной переменной, а $r(x,y) = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ — расстояние то точки (x,y) до точки $C{=}(0,1)$ (см. рис. 2). Данное замечание позволяет сравнительно быстро решить задачу с помощью элементарно-геометрического подхода.

Все точки, подозрительные на глобальный экстремум на E, в данном случае, делятся на три группы: 1) внутренние подозрительные точки (точки подозрительные на безусловный экстремум); 2) подозрительные точки, лежащие на сторонах криволинейного треугольника $V_1V_2V_3$, исключая вершины — точки, удовлетворяющие необходимому условию условного экстремума относительно ребра, содержащего данную точку; 3) вершины V_1, V_2, V_3.

1) Точки первой группы находим с помощью необходимого условия локального экстремума во внутренности E. В силу правила дифференцирования композиции $\nabla f(x,y) = \nabla g(r(x,y)) = g'(r(x,y)) \cdot \nabla r(x,y)$. Таким образом,

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 0 = g'(r(x,y)) = 1 - 3r^2(x,y), \\ \mathbf{0}_2 = \nabla r(x,y) = \dfrac{1}{r(x,y)} \cdot (x,y), \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad r(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Т.е. $\nabla f(x,y) = \mathbf{0_2}$ только в точках окружности $S_* = \{x^2+(y-1)^2 = \frac{1}{3}\}$, кроме того, к подозрительным должна быть отнесена точка недифференцируемости функции f —

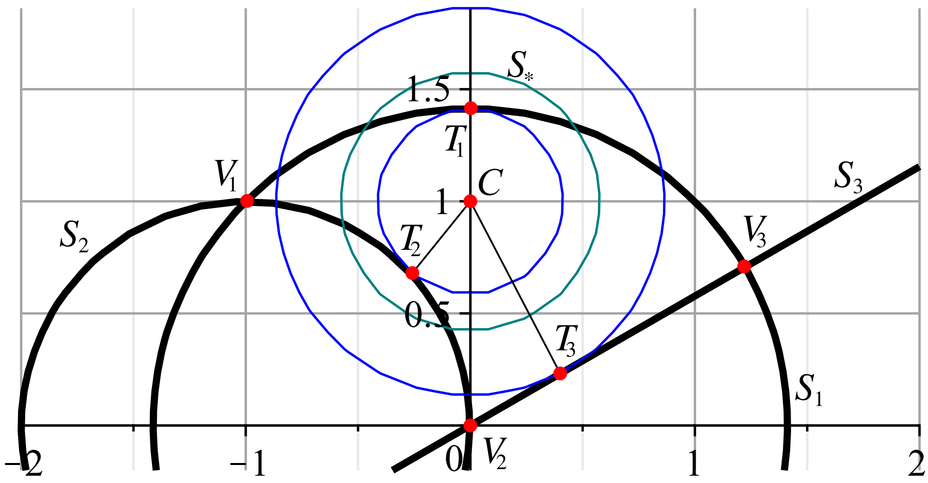

Рис. 2. (см. пример 2) Для функции $f(x,y)=r(1-r^2)(x,y)$, где $r = r(x,y)$ — расстояние от точки (x,y) до точки $C=(0,1)$, требуется найти наибольшее и наименьшее значение на множестве E, ограниченном криволинейным треугольником $V_1V_2V_3$, образованным окружностями $S_1 = \{x^2+y^2 = 2\}$, $S_2 = \{x^2+2x+y^2 = 0\}$ и прямой $S_3=\{x=\sqrt{3}y\}$. Линии уровня функции $f(x,y)$ являются окружностями с центром в точке C (либо объединением таких окружностей). T_1, T_2, T_3 — точки, в которых кривые S_1, S_2, S_3 касаются линий уровня функции $f(x,y)$. Окружность $S_* = \{x^2+(y-1)^2 = \frac{1}{3}\}$ состоит из стационарных точек функции $f(x,y)$. Подозрительные на глобальный экстремум на E точки: C, T_1, T_2, T_3, V_1, V_2, V_3 и точки множества $S_* \cap E$.

точка C. Значения функции f в найденных точках есть $f(C) = 0$ и $f(S_*) = g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Отметим, что $M = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ есть искомое максимальное значение f на E, т.к. в точке $\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция $g(r)$ достигает максимума на луче $[0,+\infty)$ ($g(r)$ возрастает на $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и убывает на $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$). Также отметим, что $g([0,1]) = [0, M]$. Поскольку 0 и M уже попали в число подозрительных значений, из дальнейшего исследования можно исключить все точки, удаленные от C не больше чем на 1.

2) Чтобы найти точки возможного экстремума на ребрах, вспомним геометрический смысл необходимого условия условного экстремума: в точке условного экстремума относительно ребра S_i линия уровня функции f касается S_i. Но линии уровня функции f — это окружности с с центром в точке C (либо объединения двух таких окружностей). Поэтому касание линии уровня возможно только в ближайших к C точках ребер. Координаты этих точек можно определить из элементарно-геометрических соображений (если T_i — точка, в которой ребро S_i касается линии уровня, то $T_1 = (0, \sqrt{2})$, T_2 — точка пересечения S_2 с прямой $y = x+1$ (соединяющей центры окружности S_2 с C), т.е. $T_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точка T_3 — основание перпендикуляра, опущенного к S_3 из C. Эта точка находится на расстоянии $\frac{1}{2}$ от начала координат (т.к. $\angle V_2CT_3 = \frac{\pi}{6}$), отсюда $T_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$). Однако, и не вычисляя координат, все три точки T_1, T_2, T_3 можно исключить из рассмотрения, поскольку каждая из точек реализует расстояние от точки C до содержащего эту точку ребра, а в то же время, на каждом из ребер, очевидно, имеются точки — либо V_1, либо V_2 — удаленные от C ровно на 1, т.е. $r(T_i) < 1$ для $i = 1, 2, 3$.

3) Среди вершин V_1, V_2, V_3 первые две можно исключить из рассмотрения как отстоящие от C на расстоянии 1. Осталось вычислить значение в точке $V_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$r(V_3) = \sqrt{\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} = \sqrt{3 - \sqrt{2}};$$

$$f(V_3) = g\left(\sqrt{3 - \sqrt{2}}\right) = -\sqrt{3 - \sqrt{2}} \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

Последнее найденное значение — это единственное отрицательное значение в подозрительных точках, и оно является искомым минимальным значением на E.

Ответ: Максимальное значение есть $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, достигается на $\{x^2+(y-1)^2 = \frac{1}{3}\} \cap E$, минимальное есть $-\sqrt{3 - \sqrt{2}} \cdot (2 - \sqrt{2})$, достигается в точке $V_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

В случае некомпактного множества E задача отыскания на нем наибольшего и наименьшего значений функции, вообще говоря, неразрешима (т.е. не всякая непрерывная на E функция достигает на нем своего максимума и своего минимума). В этой ситуации рассматривается также задача о супремуме и инфимуме функции на множестве E. При решении данной задачи могут быть полезными следующие утверждения:

Замечание 6. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Cl} E$ — замыкание множества E, и $f \in C(\operatorname{Cl} E)$. Тогда

$$\sup_E f = \sup_{\operatorname{Cl} E} f, \quad \inf_E f = \inf_{\operatorname{Cl} E} f. \tag{12}$$

Чтобы убедиться в справедливости, например, первого из равенств (12) обозначим $A = \sup_E f$, $B = \sup_{\operatorname{Cl} E} f$. Т.к. $E \subseteq \operatorname{Cl} E$, ясно, что $A \le B$. Далее, для всякой точки $x \in \operatorname{Cl} E$ найдется последовательность $x_j \to x$ точек E. Для каждого j в силу определения A верно $f(x_j) \le A$, тогда по непрерывности f на $\operatorname{Cl} E$ и предельного перехода в неравенстве получается $f(x) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) \le A$. Ввиду произвольности точки $x \in \operatorname{Cl} E$ из последнего следует $B \le A$.

Соотношение (12) позволяет задачу об отыскании супремума и инфимума функции на произвольном множестве сводить к задаче на замкнутом множестве. На замкнутом множестве данную задачу решать несколько удобнее, поскольку в случае замкнутого множества могут быть использованы следующие соображения:

1) При наличии ограниченности замкнутое множество компактно, поэтому применима теорема Вейерштрасса и достаточное условие глобального экстремума на компакте.

2) В отсутствии ограниченности всего замкнутого множества, возможно, исследование функции сводится к исследованию на некоторой ограниченной части исходного множества (см. ниже пример 4 вычисления расстояния от точки до гиперплоскости).

3) Если $f \in C(E)$, где E — замкнутое неограниченное множество (и теорема Вейерштрасса к f и E непосредственно неприменима), то справедливо следующее соотношение:

$$\sup_E f \in f(E) \cup \{\overline{\lim_{x\to\infty}} f(x)\}, \qquad \inf_E f \in f(E) \cup \{\underline{\lim_{x\to\infty}} f(x)\}, \tag{13}$$

где $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, f(x)$ — это есть, соответственно, наибольший и наименьший из частичных пределов функции в бесконечности (т. е. при $||x|| \to +\infty$).

В частности, если существует предел $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ (где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$), то

$$\inf_E f,\ \sup_E f \in f(E) \cup \{\lim_{x\to\infty} f(x)\}. \tag{14}$$

т.е. *в случае непрерывности функции на замкнутом множестве и существования предела функции в бесконечности супремум функции по множеству либо достигается на этом множестве (в одной из подозрительных на глобальный экстремум точек), либо равен пределу функции в бесконечности.*

Равенство (14) вытекает из (13). Проверим первое из входящих в (13) равенств. Ясно, что $\sup_E f = \sup f(E) \in \operatorname{Cl} f(E)$, значит, существует последовательность $y_i \to \sup_E f$ точек множества $f(E)$. Пусть $\{x_i\}$ последовательность каких-либо прообразов последовательности $\{y_i\}$, т.е. $f(x_i) = y_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда в силу обобщенного принципа выбора существует подпоследовательность $\{x_{i_j}\}$, обладающая пределом в $E \cup \{\infty\}$, который обозначим x_*. Если $x_* \neq \infty$, то $x_* \in E$, и тогда

$$\sup_E f = \lim_{i\to\infty} y_i = \lim_{i\to\infty} f(x_i) = \lim_{j\to\infty} f(x_{i_j}) = f(x_*) \in f(E).$$

Если же $x_* = \infty$, то тем самым $\sup_E f$ является частичным пределом функции в бесконечности. Этот частичный предел является максимальным, поскольку $\sup_E f$ мажорирует любую последовательность, состоящую из значений f на E. Таким образом, в обоих случаях $\sup_E f$ принадлежит множеству $f(E) \cup \{\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, f(x)\}$.

Следующие два примера — задача об экстремальных значениях квадратичной формы на сфере и задача о расстоянии от точки до гиперплоскости — подробно рассмотрены в литературе (см. [2]), поэтому здесь мы излагаем их решение сжато.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение квадратичной формы

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

с симметричной матрицей коэффициентов

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \ :\ a_{ij} = a_{ji} \quad \text{при всех } i, j = 1, \ldots, n,$$

на единичной сфере $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$.

Схема решения (более подробное решение можно найти в [2]). Данная задача есть задача о наибольшем и наименьшем значении функции (квадратичной формы $Q(x)$) на компакте, заданном одним уравнением (т.е. на сфере). Можно решить задачу с помощью следующих двух шагов:

1) Найти для функции $Q(x)$ все точки, подозрительные на условный экстремум на сфере. Поскольку градиент функции связи в каждой точке сферы невырожден (т.е. ранг $\Phi'(x)$ максимален), к таковым точкам относятся только точки стационарности функции Лагранжа $L(x) = Q(x) - \lambda(\sum_{i=1}^n x_i^2)$, лежащие на сфере. Оказывается, все такие точки — это собственные векторы матрицы коэффициентов A, и

только они, а множители Лагранжа — это собственными числа, которым отвечают данные собственные векторы.

2) Применить достаточное условие глобального экстремума на компакте — вычислить значения квадратичной формы $Q(x)$ во всех подозрительных точках и сравнить между собой. Значения функции в подозрительных точках это собственные числа соответствующих векторов.

Ответ: *наибольшее (наименьшее) значение квадратичной формы на единичной сфере равно наибольшему (наименьшему) собственному числу симметричной матрицы данной формы и достигается на отвечающем ему собственном векторе.*

Пример 4. Найти расстояние от точки $c \in \mathbb{R}^n$ до гиперплоскости

$$\Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \right\},$$

где $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, $b \in \mathbb{R}$ — фиксированные параметры.

Схема решения (более подробное решение можно найти в [2]). Данная задача есть задача об условном минимуме функции $g(x) = ||x - c||$ на гиперплоскости; этой задаче равносильна задача об условном минимуме функции $f(x) = g^2(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 = ||x - c||^2$ на гиперплоскости, а вторая вычислительно проще.

На первом этапе решения задачи с помощью необходимого условия условного экстремума находится единственная в этой задаче подозрительная на условный экстремум точка — стационарная точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ функции Лагранжа $L(x) = f(x) - \lambda(\sum_{i=1}^n a_i x_i + b)$:

$$x_k^* = c_k - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i + b}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot a_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Если минимально удаленная от c точка гиперплоскости существует, то ей может быть только точка x^*, поскольку других подозрительных на условный экстремум точек нет. Поэтому для завершения решения достаточно проверить существование глобального минимума на Π. Для этого можно использовать такое рассуждение. При "достаточно большой" длине $||x||$ исследуемая функция $f(x) \geq (||x|| - ||c||)^2$ принимает "большие" значения, поэтому задача об отыскании инфимума функции на всей гиперплоскости Π может быть сведена к задаче об отыскании инфимума на пересечении K гиперплоскости с некоторым "достаточно большим" замкнутым шаром $\bar{B}$ с центром в нуле. Шар должен быть настолько большим, чтобы всюду вне данного шара значения функции были больше, чем $f(x^*)$ (данное условие выполняется, если радиус шара R удовлетворяет условию $R \geq ||c|| + \sqrt{f(x^*)} + 1$). Тогда $x^* \in B$ и:

$$\inf_{\Pi} f = \min\{\inf_{K} f, \inf_{\Pi \setminus K} f\} = \inf_{K} f \tag{15}$$

Пересечение K замкнутого шара с гиперплоскостью является компактом, поэтому $\min_K f$ существует по теореме Вейерштрасса. В силу (15) это означает существование и минимума функции на всей гиперплоскости. Тогда этот минимум есть

$$f(x^*) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i + b\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Ответ. *Расстояние от точки* $c = (c_1, \ldots, c_n)$ *до гиперплоскости*

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \ : < a, x > +b = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \right\}$$

есть $\sqrt{f(x^*)} = \left| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i + b \right| \cdot \left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} \right)^{-1} = \frac{|<a,c>+b|}{||a||}$.

Пример 5. Найти расстояние между кривой и прямой, заданными уравнениями: $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ и $9x - 7y + 16 = 0$.

Решение. Пусть (x, y) обозначает точку, лежащую на заданной кривой, т.е.

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0.$$

Расстояние от точки (x, y) до заданной прямой обозначим $\rho(x, y)$. По известной формуле аналитической геометрии,

$$\rho(x, y) = \frac{|9x - 7y + 16|}{\sqrt{9^2 + 7^2}} = \frac{1}{\sqrt{130}}|9x - 7y + 16|.$$

Заметим, что уравнение рассматриваемой кривой упрощается в координатах

$$\begin{aligned} u &= x - y, \\ v &= x + y \end{aligned} \tag{16}$$

и принимает вид

$$2u^2 = v. \tag{17}$$

Из (16) и (17) вытекает очевидная оценка

$$9x - 7y + 16 = 9u + (v - u) + 16 = 8u + v + 16 = 8u + 2u^2 + 16 = 2(u + 2)^2 + 8 \geq 8,$$

таким образом, для любой точки (x, y) кривой верно неравенство $\rho(x, y) \geq \frac{8}{\sqrt{130}} = \rho(3, 5)$ (точка $(x, y) = (3, 5)$ есть решение системы (16) при $u = -2$ и $v = 2u^2$).

Таким образом, искомое расстояние есть $\frac{8}{\sqrt{130}}$.

Пример 6. Исследовать на условный экстремум функцию $u(x, y, z) = xyz$ при условиях

$$\begin{cases} yz + xz + xy = 8, \\ x + y + z = 5. \end{cases} \tag{18}$$

Пусть S — множество, удовлетворяющее системе уравнений связи. Найдем точки (множества S), подозрительные на условный экстремум, для чего составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,z) = u(x,y,z) - \lambda \cdot \Phi_1(x,y,z) - \mu \cdot \Phi_2(x,y,z),$$

где λ и μ — множители Лагранжа, $\Phi_1(x,y,z) = yz+xz+xy-8$ и $\Phi_2(x,y,z) = x+y+z-5$ — функции связи. Заметим, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \nabla\Phi_1 \\ \nabla\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+y & z+x & x+y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

максимален (равен двум) в каждой точке множества S. Действительно, максимальность ранга нарушается только при $x = y = z$, но в этом случае система уравнений связи (18) неразрешима:

$$\begin{cases} x = y = z, \\ yz + xz + xy = 8, \\ x + y + z = 5; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = \frac{8}{3}, \\ x = \frac{5}{3}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in \varnothing \tag{19}$$

Таким образом, в силу необходимого условия условного экстремума все точки подозрительные на условный экстремум являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} \nabla L = 0, \\ \Phi_1 = 0, \\ \Phi_2 = 0; \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda(y+z) - \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda(x+z) - \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda(x+y) - \mu = 0, \\ yz + xz + xy = 8, \\ x + y + z = 5. \end{cases} \tag{20}$$

Заметим, что переменные x, y, z входят в систему (20) симметрично, поэтому если набор чисел (x, y, z) при некоторых λ и μ есть решение системы, то любая перестановка набора (x, y, z) также есть решение при тех же λ и μ. Однако на прямой $x = y = z$ решений системы (20) нет, поскольку, как уже отмечалось (см. (19)), в точках этой прямой не выполняется уже система уравнение связи (18).

Далее, удобно выразить один множитель Лагранжа через другой, если сложить первые три уравнения системы (20) и совместить результат с последними двумя уравнениями системы:

$$0 = (yz - \lambda(y+z) - \mu) + (xz - \lambda(x+z) - \mu) + (xy - \lambda(x+y) - \mu) = 8 - 10\lambda - 3\mu,$$

т.е. $\mu = \frac{2}{3}(4 - 5\lambda)$.

Уравнение, полученное вычитанием второго уравнения системы (20) из первого (а также третьего из второго и первого из третьего), позволяет упростить соотношение между x, y и z. В результате получаем:

$$
\begin{cases}
(y-x)(z-\lambda)=0,\\
(z-y)(x-\lambda)=0,\\
(x-z)(y-\lambda)=0,\\
\mu=\frac{2}{3}(4-5\lambda);\\
yz+xz+xy=8,\\
x+y+z=5;
\end{cases}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l}\lambda=x=y\neq z,\\ \lambda=y=z\neq x,\\ \lambda=z=x\neq y,\end{array}\right.\\
\mu=\frac{2}{3}(4-5\lambda);\\
(y+x)z+xy=8,\\
z=5-(x+y).
\end{cases}
$$

Если $\lambda=x=y\neq z$, то два последних уравнений системы приводят к уравнению $3x^2-10x+8=0$, корни которого это $x_1=2$ и $x_2=\frac{4}{3}$. Отсюда два решения системы (20):

$$
(x,y,z)=A=(2,2,1)\text{ при }(\lambda,\mu)=(2,-4)\text{ и}\\
(x,y,z)=B=\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{4}{3},\tfrac{7}{3}\right)\text{ при }(\lambda,\mu)=\left(\tfrac{4}{3},-\tfrac{16}{9}\right).
$$

Остальные решения системы (в силу уже отмечавшейся симметрии задачи) есть перестановки координат векторов A и B.

Заметим, что

$$
u(A)=4<u(B)=\frac{112}{27}. \tag{21}
$$

Нами найдены ПОДОЗРИТЕЛЬНЫЕ на экстремум точки. Для завершения решения задачи требуется КЛАССИФИЦИРОВАТЬ эти точки, т.е. для каждой найденной точки определить тип экстремума в ней либо установить его отсутствие. Проделаем это двумя способами.

Первый способ классификации точек. Заметим, что множество E, удовлетворяющее системе связи, есть компакт, поскольку это замкнутое подмножество сферы $x^2+y^2+z^2=9$, уравнение которой является следствием системы уравнений связи (получить данное уравнение можно вычтя из второго уравнения связи, возведенного в квадрат, первое уравнение связи, умноженное на 2). На множестве подозрительных точек функция принимает всего два значения. Отсюда в силу достаточного условия глобального экстремума на компакте и (21) заключаем, что точка A и перестановки ее координат, т.е. точки $(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)$ — это точки минимума, а $B=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ и перестановки ее координат — точки максимума.

Заметим, что при использовании первого способа классификации точек нам не потребовались вычисления производных второго порядка и даже вычисления множителей Лагранжа можно было избежать. Но этот способ оказалось возможным применить сразу ко всем подозрительным точкам потому, что 1) множество связи есть компакт 2) на множестве всех подозрительных точек исследуемая функция принимает всего два значения.

Второй способ классификации точек. Воспользуемся достаточным условием условного экстремума, для чего вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$
d^2_{(x,y,z)}L=2\big((z-\lambda)dxdy+(y-\lambda)dxdz+(x-\lambda)dydz\big).
$$

Как в точке A, так и в точке B верно $x=y=\lambda$, поэтому выражение d^2L в этих точках принимает вид:

$$
d^2_P L=2(z-\lambda)dxdy,\quad P\in\{A,B\}.
$$

Данная функция как квадратичная форма дифференциалов dx, dy, dz не является знакоопределенной на всем трехмерном пространстве (при всевозможных значениях дифференциалов dx, dy, dz), поэтому для применения достаточного условия условного экстремума требуется исследовать сужение данной квадратичной формы на касательное пространство T_P к S в точке P. На касательном пространстве дифференциалы dx, dy, dz связаны продифференцированной системой уравнений связи:

$$\begin{cases} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Точке $A = (2, 2, 1)$ отвечает множитель Лагранжа $\lambda = 2$, т.е. $d_A^2 L = -2dxdy$, система (22) в этой точке принимает вид:

$$\begin{cases} 3dx + 3dy + 4dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} dz = 0, \\ dy = -dx. \end{cases}$$

Т.е. касательное пространство к S в точке A есть пространство $T_A = \{(t, -t, 0)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Сужение $d_A^2 L$ на это пространство есть положительно определенная квадратичная форма:

$$d_A^2 L \Big|_{T_A} = 2dx^2 > 0,$$

значит, в силу достаточного условия условного экстремума A является точкой условного минимума. В силу симметрии задачи, в точках полученных перестановкой координат точки A также условный минимум.

Аналогично, $d_B^2 L = 2dxdy$, а дифференциалы на касательном пространстве T_B связывает система

$$\begin{cases} 11dx + 11dy + 8dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} dz = 0, \\ dy = -dx, \end{cases}$$

поэтому

$$d_B^2 L \Big|_{T_B} = -2dx^2 < 0,$$

и точка B и перестановки ее координат являются точками условного максимума.

Пример 7. Найти длины главных полуосей эллипсоида в $\mathbb{R}^n$, заданного уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \geq i}^{n} x_i x_j = 1. \tag{23}$$

Решение. Задача заключается в отыскании наибольшего и меньшего значений функции

$$\rho(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

то есть длины вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$, на заданном эллипсоиде E. Эта задача равносильна отысканию экстремальных значений функции $f = \rho^2$ (поскольку неотрицательная функция достигает экстремальных значений в тех же точках, где их достигает ее квадрат), а функция ρ^2 удобнее для исследования.

Заметим, что поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\geq i}^{n} x_i x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\geq j}^{n} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\leq i}^{n} x_i x_j \tag{24}$$

(первое равенство есть результат изменения обозначений индексов суммирования, а второе — порядка суммирования), и

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

то при сложении крайних частей в (24) образуется выражение $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, и уравнение эллипсоида (23) можно представить в симметричной форме:

$$\sigma^2(x) + \rho^2(x) = 2, \tag{25}$$

где

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Рассмотрим два способа решения задачи:
1) с помощью неравенства Коши и элементарных оценок слагаемых в правой части уравнения связи (25),
2) перебором значений функции f на множестве подозрительных на условный экстремум точек.

1-й способ решения: равенство (25) связывает функции ρ^2 и σ^2 — условный максимум одной означает условный минимум другой.

Заданный эллипсоид имеет непустое пересечение с гиперплоскостью Π, заданной уравнением $\sigma(x) = 0$ (например, в этом пересечении содержится точка $(1, -1, 0, \dots, 0)$). В каждой точке гиперплоскости Π достигается наименьшее возможное (нулевое) значение $\sigma^2(x)$, откуда

$$\max_E \rho^2 = \rho^2\Big|_{E\cap\Pi} = 2.$$

Оценить сверху величину σ^2 позволяет неравенство Коши: $\sigma^2(x) \leq n\rho^2(x)$, тогда в каждой точке эллипсоида справедлива оценка

$$\rho^2(x) = 2 - \sigma^2(x) \geq 2 - n\rho^2(x) \quad\Rightarrow\quad \rho^2(x) \geq \frac{2}{n+1}.$$

Эта оценка обращается в равенство вместе с неравенством Коши, т.е. при условии $x_1 = \dots = x_n$. Данное условие на эллипсоиде выполняется в двух точках, расположенных симметрично относительно начала координат: $x_1 = \dots = x_n = \pm\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}$.

Итого, главные полуоси есть $\sqrt{2}$ и $\sqrt{\frac{2}{(n+1)}}$.

При решении *2-м способом* реализуем общую схему отыскания глобально экстремальных значений с помощью функции Лагранжа:

a) найдем множество всех подозрительных на условный экстремум при условии (23) точек. Поскольку все участвующие функции непрерывно дифференцируемы на всем пространстве, к таким точкам могут относится только те точки эллипсоида, в которых

— функция связи $\Phi(x) = \sigma^2(x)+\rho^2(x)-2$ имеет нулевой градиент (нарушается условие максимальности ранга);

— функция Лагранжа

$$L(x) = f(x) - \lambda\cdot\big(\sigma^2(x)+\rho^2(x)\big) = (1-\lambda)\,\rho^2(x) - \lambda\sigma^2(x)$$

имеет нулевой градиент при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) сравним между собой значения функции f в во всех подозрительных точках. Наибольшее и наименьшее из них являются квадратами длин главных осей эллипсоида.

Итак, вычислим частные производные функции связи $\Phi(x)$:

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i} = 2(\sigma(x)+x_i) \qquad i = 1:n.$$

В каждой точке эллипсоида E ранг $\Phi(x)$ максимален:

$$\operatorname{rang}\Phi < 1 \quad\Rightarrow\quad \nabla\Phi(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \sigma(x)+x_i = 0 \quad \forall\, i = 1:n \quad\Rightarrow\quad x = \mathbf{0}_n \quad\Rightarrow\quad x \notin E.$$

Значит, в данном случае все подозрительные на условный экстремум точки — это точки эллипсоида, удовлетворяющие системе уравнений Лагранжа

$$\begin{cases}\nabla L(x) = \mathbf{0}_n,\\ \Phi(x) = 0;\end{cases} \qquad\Rightarrow\qquad \begin{cases}(1-\lambda)x_i - \lambda\sigma(x) = 0 \qquad i = 1:n,\\ \sigma^2(x)+\rho^2(x) = 2.\end{cases} \tag{26}$$

Решения системы, отвечающие параметру $\lambda \neq 1$, должны удовлетворять равенству $x_1 = \dots = x_n$, подстановка которого в уравнение связи дает следующее:

$$(nx_1)^2 + nx_1^2 = 2 \quad\Rightarrow\quad x_1^2 = \frac{2}{n^2+n} \quad\Rightarrow\quad \rho^2 = nx_1^2 = \frac{2}{n+1}.$$

При $\lambda = 1$ система верна в точках пересечения эллипсоида и плоскости $\sigma(x) = 0$. В этих точках уравнение связи (25) принимает вид $f = \rho^2 = 2$.

Таким образом, на множестве всех подозрительных на условный экстремум точек функция $f = \rho^2$ принимает всего два значения, 2 и $\frac{2}{n+1}$, и, поскольку максимум и минимум в данной задаче достигаются (по теореме Вейерштрасса), можно утверждать, что $\max_E \rho^2(x) = 2$, $\min_E \rho^2(x) = \frac{2}{n+1}$, то есть главные полуоси есть $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{n+1}}$.

Пример 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y,z) = xy + yz$ на множестве $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 1\}$.

Решение. Ясно, что функция f непрерывна и по теореме Вейерштрасса достигает на компакте K обоих своих экстремальных значений. Если одно из экстремальных значений достигается в некоторой точке $P = (x_0, y_0, z_0) \in K$, то эта точка может находиться

1) во внутренности $K^\circ = \{x^2 + y^2 < z < 1\}$, тогда в точке P выполняется необходимое условие (безусловного) экстремума;

2) на „нижней грани“, т.е. части поверхности $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z < 1\}$. Тогда P является точкой условного экстремума относительно уравнения связи $z = x^2 + y^2$;

3) на „верхней грани“, т.е. части поверхности $S_2 = \{(x, y, z) : z = 1\}$, удовлетворяющей неравенству $x^2 + y^2 < 1$. Тогда P является точкой условного экстремума относительно уравнения связи $z = 1$;

4) на „ребре“, т.е. на окружности $\Gamma = \{x^2 + y^2 = z = 1\}$. Тогда P является точкой условного экстремума относительно системы уравнения связи $z = 1$;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1. \end{cases}$$

Заметим, что уравнения связи в случаях 2)–3) позволяют на соответствующем участке границы компакта легко исключить переменную z, при этом в 2)–3) задача об условном экстремуме сводится к задаче о безусловном экстремуме для меньшего числа переменных и нет необходимости рассматривать функцию Лагранжа.

Итак, найдем все точки подозрительные на соответствующий вид экстремума в случаях 1)–4).

1)

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}, \\ x^2 + y^2 < z < 1; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y = 0, \\ x + z = 0, \\ x^2 + y^2 < z < 1. \end{cases}$$

На множестве решений данной системы $\{(-z, 0, z)\}_{z \in (0,1)}$ функция f тождественно равна нулю.

2) $f\Big|_{\{x^2+y^2=z\}} = xy + y(x^2 + y^2) = y(x + x^2 + y^2)$. Рассмотрим точки, подозрительные на внутренний (безусловный) экстремум функции двух переменных $g(x, y) = y(x + x^2 + y^2)$ в круге $D = \{(x, y) \in R^2 \;:\; x^2 + y^2 < 1\}$:

$$\begin{cases} \nabla g(x, y) = \mathbf{0}, \\ x^2 + y^2 < 1; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y(1 + 2x) = 0, \\ x + x^2 + 3y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Последняя система имеет три решения $(0, 0)$ и $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$. Точка $(-1, 0)$ — решение системы уравнений, лежащее не в самом круге, а на его границе — также должна попасть в число подозрительных точек в 4), поскольку она является подозрительной уже для задачи с одним условием связи (тем более, с двумя). Вычислим значения g во всех найденных точках:

$$g(0, 0) = f(0, 0, 0) = 0, \quad g\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{12}}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{3}\right) = \mp\frac{\sqrt{3}}{36}.$$

3) Аналогично п. 2), $f\Big|_{\{z=1\}} = xy + y$. Требуется определить точки, подозрительные на внутренний (безусловный) экстремум функции двух переменных $h(x, y) = xy + y$ опять же в круге $D = \{(x, y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$:

$$\begin{cases} \nabla h(x, y) = \mathbf{0}, \\ x^2 + y^2 < 1; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y = 0, \\ x + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

В открытом круге последняя система не имеет решений, а на его границе лежит точка $(-1, 0)$, которая отвечает точке $(-1, 0, 1)$ на границе K, эта точка уже была отмечена как подозрительная в пункте 2).

4) На окружности пересечения параболоида с плоскостью можно свести задачу к отысканию подозрительных точек функции одной переменной:

$$f\Big|_{\{x^2+y^2=z, \ z=1\}} = xy+y\Big|_{\{x^2+y^2=1\}} = \pm(x+1)\sqrt{1-x^2}\Big|_{\{x\in[-1;1]\}} = \sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\Big|_{\{\varphi\in[-\pi,\pi]\}}.$$

Отыскивая особые точки функции $v(\varphi) = \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \sin\varphi$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ (или функции $u(x) = (x + 1)\sqrt{1 - x^2}$) на промежутке $[-1; 1]$, находим и подозрительные на экстремальность значения функции $f(x, y, z)$:

$$v'(\varphi) = \cos 2\varphi + \cos\varphi = 2x^2 + x - 1\Big|_{\{x=\cos\varphi\}} = 2(x + 1)\,(x - 1/2)\,.$$

Двум найденным подозрительным значениям x отвечают такие значения функции f: $f(-1, 0, 1) = u(-1) = 0$ и $f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \pm u\left(\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Для завершения задачи остается перебрать значения функции во всех найденных в пунктах 1)-4) подозрительных точках и выбрать среди них наибольшее и наименьшее: $\min_K f = \min\{\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{36}, 0\} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$, и $\max_K f = \max\{\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{36}, 0\} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\min_K f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\max_K f = \frac{3\sqrt{3}}{4}$,

Пример 9. Найти супремум и инфимум функции

$$f(x_1, ..., x_n) = (a_1x_1 + \dots + a_nx_n) \cdot e^{-(x_1+\dots+x_n)},$$

где $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, на множестве $O = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$.

Решение. В силу замечания 6 (см. 12) исходная задача равносильна задаче отыскания супремума и инфимума на замыкании $E = \mathrm{Cl}\, O = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Инфимум легко угадывается: ясно, что функция неотрицательна на множестве E, значит, и инфимум неотрицателен. С другой стороны, $\inf_E f(x) \leq f(\mathbf{0}) = 0$. Таким образом,

$$\inf_O f(x) = \inf_E f(x) = 0.$$

Для отыскания супремума попробуем оценить сверху нашу функцию более удобной для исследования функцией. Положим $A = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$, тогда

$$f(x_1, ..., x_n) \le (Ax_1 + \ldots Ax_n)e^{-(x_1+\cdots+x_n)} = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_j\right) e^{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_j\right)} = A \cdot g\left(\sum_{i=1}^{n} x_j\right),$$

где $g(t) = te^{-t}$ — функция одной переменной. Определим супремум функции $g(t)$ на луче $[0, +\infty)$ (поскольку отображение $(x_1, \ldots, x_n) \to \sum_{i=1}^{n} x_i$ переводит множество E в этот луч): $g'(t) = (1-t)e^{-t}$, и $g(1) = \max_{[0;+\infty)} g(t) = \frac{1}{e}$. Отсюда очевидная оценка: $\sup_E f(x) \le A \cdot \max_{[0;+\infty)} g(t) = \frac{A}{e}$. С другой стороны, если k — это такой номер координат, для которого верно $A = a_k$, и $x_* = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in E$ — точка, у которой все координаты кроме k-й равны нулю, то $\sup_O f(x) = \sup_E f(x) \ge f(x_*) = \frac{A}{e}$. Таким образом, окончательно получаем

Ответ: $\inf_O f = 0$, $\sup_O f = \frac{\max\{a_1, \ldots, a_n\}}{e}$.

В следующем примере рассматривается частный случай (при $C = 0$) задачи 8 на стр. 634 в [1]. В [6] приведено решение о наибольшем и наименьшем значении функции $h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_i^3$ ($m \ge 3$) на множестве $K_m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m \ : \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 1\}$.

Пример 10. Сколько максимумов, минимумов и седловых точек имеет функция $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{5} x_i^4$, где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_5)$, на множестве, заданном в $\mathbb{R}^5$ системой уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1, \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 0; \end{cases} \tag{27}$$

Решение. Будем использовать следующие обозначения:

$$\Phi_1(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{5} x_i, \quad \Phi_2(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 1, \quad \Phi_3(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{5} x_i^3,$$

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3),$$

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^5 \ : \ \Phi(\bar{x}) = \mathbf{0}_3\}.$$

Поиск подозрительных на условный экстремум точек начнем с точек, в которых ранг матрицы Якоби Φ' меньше максимального, т.е. меньше трех:

$$\Phi'(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 & 2x_5 \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & 3x_3^2 & 3x_4^2 & 3x_5^2 \end{pmatrix}.$$

Все миноры третьего порядка отличаются друг от друга лишь номерами координат входящих в них точек, и сводятся вынесением постоянных множителей из строк к определителям Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & 3x_3^2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \prod_{1 \le j < i \le 3} (x_i - x_j).$$

Значит, нарушение максимальности ранга, т.е. обращение в ноль всех миноров третьего порядка, таким образом, равносильно тому, что у точки $\overline{x}$ в любой тройке координат есть совпадающие, т. е. эти точки представимы в виде (s,s,t,t,t) для некоторых $s,t \in \mathbb{R}$ либо получаются перестановками координат точки (s,s,t,t,t). Таких точек в S нет, поскольку они не удовлетворяют уже системе из первого и третьего уравнений, входящих в (27). Следовательно, во всех точках множества S ранг Φ' максимален. Значит, на условный экстремум подозрительны только лежащие в S стационарные точки функции Лагранжа

$$L(\overline{x}) = f(\overline{x}) - \sum_{j=1}^{3} \lambda_i \cdot \Phi_i(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{5} x_i^4 - \lambda_3 \sum_{i=1}^{5} x_i^3 - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 1 \right) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{5} x_i. \quad (28)$$

Теперь заметим, что система уравнений стационарности функции Лагранжа в данном случае имеет специфический вид:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_i} = 4x_i^3 - 3\lambda_3 x_i^2 - 2\lambda_2 x_i - \lambda_1, \quad i = 1, \ldots, 5; \quad (29)$$

то есть все компоненты $x_1, \ldots, x_5$ любого решения $\bar{x}$ системы (8) являются корнями одного и того же уравнения третьей степени

$$4x^3 - 3\lambda_3 x^2 - 2\lambda_2 x - \lambda_1 = 0, \quad (30)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — набор множителей Лагранжа, отвечающий $\bar{x}$. Это уравнение не может иметь больше трех корней, стало быть, различными среди координат $x_1, \ldots, x_5$ решения системы могут быть не более трех чисел. С другой стороны, меньше трех различных чисел среди координат решения также не может оказаться в силу максимальности ранга Φ' в этих точках. То есть, их — различных координат решения системы, и в то же время, решений уравнения (30) — ровно три. Обозначим их буквами s, t, u. Тогда все решения системы делятся на две группы:
1) точка $\overline{x} = (s,s,s,t,u)$ и все точки, получаемые перестановкой ее координат,
2) точка $\overline{x} = (s,s,t,t,u)$ и все точки, получаемые перестановкой ее координат.

Нам будет полезным такое наблюдение. Поскольку s, t, u являются попарно различными корнями уравнения (30), систему уравнений (8) можно решать так. Сначала найти точки $\bar{x}$ первой и второй групп, удовлетворяющие системе уравнений связи, а отвечающие этим точкам множители Лагранжа затем однозначно определяются уравнением (30), т.к. в силу теоремы Виета

$$\begin{cases} -3\lambda_3 = -4(s+t+u), \\ -2\lambda_2 = 4(tu+us+st), \\ -\lambda_1 = -4stu; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_3 = \frac{4}{3}(s+t+u), \\ \lambda_2 = -2(tu+us+st), \\ \lambda_1 = 4stu. \end{cases} \quad (31)$$

1) В подозрительных на экстремум точках первой группы система уравнений связи имеет вид:

$$\begin{cases} 3s+t+u = 0, \\ 3s^2+t^2+u^2 = 1, \\ 3s^3+t^3+u^3 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Заметим, что из первого и третьего уравнений системы (32) вытекает, что либо $u = -t$, либо $u = t = 0$:

$$\begin{cases} 3s+t+u=0, \\ 3s^3+t^3+u^3=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-\frac{1}{3}(t+u), \\ (t+u)\left(-\frac{(t+u)^2}{9}+t^2-tu+u^2\right)=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} s=-\frac{1}{3}(t+u), \\ \left[\begin{array}{l} u=-t, \\ 8t^2-11tu+8u^2=0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-\frac{1}{3}(t+u), \\ \left[\begin{array}{l} u=-t, \\ u=t=0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=0, \\ \left[\begin{array}{l} u=-t, \\ u=t=0; \end{array}\right. \end{cases}$$

(уравнение $8t^2-11tu+8u^2=0$ имеет только тривиальное решение u=t=0, поскольку дискриминант соответствующей квадратичной функции отрицателен: $11^2-4\cdot 8^2<0$). Совмещая найденные условия со вторым уравнением системы, получаем, что все критические точки из первой группы — это точка $\left(0,0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\right)$ и точки, полученные перестановками ее координат, т.е. всего 20 точек. Исследуемая функция принимает в этих точках значение $\frac{1}{2}$.

2) найдем решения системы уравнений связи для точек второй группы:

$$\begin{cases} 2s+2t+u=0, \\ 2s^2+2t^2+u^2=1, \\ 2s^3+2t^3+u^3=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-2(s+t), \\ 2\left(s^2+t^2\right)+4\left(s+t\right)^2=1; \\ (s+t)\left(2(s^2-st+t^2)-8(s+t)^2\right)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \tag{33}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-s,\ u=0, \\ 4s^2=1, \end{cases} \\ \begin{cases} u=-2(s+t), \\ 6\left(s^2+t^2\right)+8\cdot st=1, \\ (s^2+t^2)+3\cdot st=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Как видим, существуют два типа решения системы уравнений связи второй группы:

2-1) $(s,t,u)=(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$. Значение функции в точках второй группы для данных значений параметров есть $f(s,s,t,t,u)=4s^4=4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$.

2-2) Решения системы (33), помимо условия $u=-2(s+t)$, удовлетворяющие линейной системе относительно $p=s^2+t^2$ и $q=st$:

$$\begin{cases} 6p+8q=1, \\ p+3q=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=0.3, \\ q=-0.1. \end{cases} \tag{34}$$

Т.е. искомые пары (s,t) — это точки пересечения окружности $s^2+t^2=0.3$ с гиперболой $st=-0.1$ (симметричной относительно прямой $t=-s$). Точки пересечения гиперболы с прямой $t=-s$ — точки $\pm(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$ — лежат внутри круга $s^2+t^2<0.3$, т.е. всего имеются 4 такие точки, расположенные симметрично относительно прямых $t=s$ и $t=-s$ (поскольку и гипербола и окружность симметричны относительно этих прямых). Далее,

$$\begin{cases} (s+t)^2=p+2q=0.1, \\ (s-t)^2=p-2q=0.5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |s+t|=\frac{1}{\sqrt{10}}, \\ |s-t|=\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \tag{35}$$

При условии $s > -t, s > t$ системе (35) удовлетворяет точка

$$(s_0, t_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

остальные решения (35) в силу симметрии есть (t_0, s_0), $-(s_0, t_0)$ и $-(t_0, s_0)$. Первым двум точкам из четырех отвечает $u_0 = -2(s+t) = \frac{-2}{\sqrt{10}}$, вторым двум — $u = \frac{2}{\sqrt{10}}$.

Таким образом, набор точек 2.2) состоит из точки $\bar{a} = (s_0, s_0, t_0, t_0, u_0)$ и всех точек, получаемых перестановкой ее координат, а также из точки $-\bar{a}$ и всех точек, получаемых перестановкой ее координат, всего $2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = 60$ точек. Поскольку исследуемая функция и функции связи инварианты относительно перемены знака точки, "поведение" функции в точках $\bar{a}$ и $-\bar{a}$ одинаково, достаточно исследовать функцию только в точке $\bar{a}$.

Вычислим значение функции в точках 2-2), а тогда, пользуясь достаточным условием глобального экстремума на компакте (ведь множество связи — это замкнутое подмножество сферы и потому компактно), выясним, в каких подозрительных точках реализуется глобальный условный экстремум. Итак, в случае 2-2):

$$f(s,s,t,t,u) = 2(s^4+t^4) + 2^4(s+t)^4 = 2\big(p^2 - 2q^2 + 8\cdot(0.1)^2\big) = 2(0.07+0.08) = 0.3.$$

Таким образом, на множестве подозрительных точек исследуемая функция принимает всего три значения, $\frac{1}{4} < \frac{3}{10} < \frac{1}{2}$. На основании достаточного условия глобального экстремума на компакте
– все точки, в которых функция принимает значение $\frac{1}{4}$, — точки набора 2-1) — являются точками глобального условного минимума;
– точки, в которых функция принимает значение $\frac{1}{2}$, — точки группы 1) — являются точками глобального условного максимума;
– о наличии или отсутствии экстремума в точках набора 2.2) вывода сделать нельзя.

Таким образом, в точках 2.2) нужны дополнительные исследования. Применим достаточное условие условного экстремума (проанализируем знак второго дифференциала функции Лагранжа на касательном пространстве к многообразию S в этих точках).

Для применения достаточного условия условного экстремума требуется вычислить второй дифференциал $d^2_{\bar{a}}L$ функции Лагранжа (29). Он содержит только чистые частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} = 2g(x_i), \quad \text{где} \quad g(x) = 6x^2 - 3\lambda_3 x - \lambda_2,$$

Множители Лагранжа λ_2 и λ_3 в точке $\bar{a}$ определяются с помощью (31):

$$\begin{cases} \lambda_3 = \frac{4}{3}(s+t+u) = \frac{2u}{3} = -\frac{2\sqrt{10}}{15}, \\ \lambda_2 = -2(tu+us+st) = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Тогда

$$g(s_0) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0, \quad g(t_0) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0, \quad g(u_0) = 1.$$

Значит, $d^2_{\bar a}L$ как функция дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_5$ на всем $\mathbb{R}^5$ представляет собой неопределенную (знакопеременную) квадратичную форму:

$$\frac{1}{2}d^2_{\bar a}L = \sum_{i=1}^{5} g(a_i)dx_i^2 = g(s_0)(dx_1^2 + dx_2^2) + g(t_0)(dx_3^2 + dx_4^2) + g(u_0)dx_5^2.$$

При этом неприменим краткий вариант достаточного условия условного экстремума. Чтобы воспользоваться подробным вариантом достаточного условия, найдем соотношения, связывающие дифференциалы переменных $dx_1, \ldots, dx_5$ на касательном пространстве, продифференцировав систему уравнений связи:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 dx_i = 0, \\ \sum_{i=1}^5 x_i dx_i = 0, \\ \sum_{i=1}^5 x_i^2 dx_i = 0; \end{cases}$$

что при $\bar x = \bar a = (s_0, s_0, t_0, t_0, u_0)$ принимает вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 dx_i = 0, \\ s_0(dx_1 + dx_2) + t_0(dx_3 + dx_4) + u_0 dx_5 = 0, \\ s_0^2(dx_1 + dx_2) + t_0^2(dx_3 + dx_4) + u_0^2 dx_5 = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Поскольку в данной задаче знак сужения d^2L на касательное пространство не определяется без серии преобразований, в соответствии с замечанием к подробному варианту достаточного условия экстремума (замечание 3 на стр. 7), попытаемся вычислить значения d^2L на некоторых касательных векторах — если окажется, что на двух каких-либо касательных векторах d^2L принимает значения разных знаков, то тем самым будет установлена неопределенность формы $d^2L\Big|_{T_{\bar a}}$ (правда, если значения d^2L на всех пробных векторах будут иметь один знак, то никакого вывода сделать не получится).

Система (36), очевидно, выполняется при $dx_2 = -dx_1$, $dx_4 = -dx_3$, $dx_5 = 0$. Рассмотрим в качестве пробных касательные векторы вида $\bar h = (v, -v, w, -w, 0)$, где $v, w \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{1}{2}d^2_{\bar a}L(\bar h) = \sum_{i=1}^{5} g(a_i)h_i^2 = 2g(s_0)v^2 + 2g(t_0)w^2 = (1 + \sqrt{5})v^2 - (\sqrt{5} - 1)w^2.$$

Последнее полученное выражение явно знакопеременно (оно положительно, например, если $v \neq 0$, $w = 0$; и отрицательно, если $v = 0$, $w \neq 0$). Таким образом, в точках 2-2) сужение второго дифференциала функции Лагранжа на касательное пространство является знакопеременной формой, значит, в силу подробного варианта достаточного условия условного экстремума, все точки этой группы являются седловыми.

Вывод. У заданной функции при заданных условиях:
20 точек условного максимума — это точка $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right)$ и все точки, полученные перестановкой ее координат;
30 точек условного минимума — это точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ и все точки, полученные

перестановкой ее координат;
60 седловых точек — это точки
$\pm\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{-2}{\sqrt{10}}\right)$ и все точки, полученные перестановкой координат этих двух точек.

Задачи для самостоятельной работы:

$\boxed{\mathbf{1}}$ Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = xy(6-x-y)$ на множестве $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \le 10, x \ge 0, y \ge 0\}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Определить наибольшую вместимость воронки, поверхность которой равна S.

Указание: $S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$, где h — высота, а r — радиус круга в основании воронки.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Для функции $f(x,y,z) = y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 4yz$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве $E = \{(x,y,z) : z \ge 0, x^2+3y^2+6z^2 = 1\}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Найти максимум и минимум функции $f(x,y,z) = zy + 2xy - xz$ на сфере $x^2+y^2+z^2 = 2$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найти максимум и минимум функции $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ на сфере $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Доказать неравенство Маклорена: если $x_i \ge 0$ для $i \in \{1,\dots,n\}$ и $\sum_{i=1}^n x_i = an$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} x_i x_j \le \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

Указание: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j>i} x_i x_j = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$. Далее полезно вспомнить про неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Функцию $f(x,y,z) = xy + y^2 - yz$ исследовать на условный экстремум на сфере $x^2+y^2+z^2 = 4$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Найти максимум и минимум функции $f(x,y,z) = 3x^2+4y^2+5z^2-4yz$ на сфере $x^2+y^2+z^2 = 1$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Найти расстояние между кривой $9x^2+4y^2 = 36$ и прямой $y+3x = 9$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Найти полуоси эллипса $7x^2-6xy+7y^2 = 8$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Функцию $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2-2y}\cdot(2y-x^2-y^2)$ исследовать на экстремум:
а) на компакте E, лежащем в верхней полуплоскости и ограниченном окружностями $S_1 = \{x^2+y^2 = 2\}$, $S_2 = \{x^2+2x+y^2 = 0\}$ и прямой $S_3 = \{x = \sqrt{3}y\}$;
б) на границе компакта E (см. пример 2).

Условия некоторых приведенных задач взяты из задачника [5].

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1 $\max_E f = f(2,2) = 8$, $\min_E f = f(5,5) = -100$.

2 $V = \frac{1}{3\sqrt[4]{27}} \cdot \sqrt{\frac{2S^3}{\pi}}$.

3 $\max_E f = 1$, $\min_E f = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4 $\max f = 2$, $\min f = -1-\sqrt{3}$.

7 Две точки условного минимума $\pm p_m = \pm\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\cdot\big(1, 1-\sqrt{3}, -1\big)$, $f(\pm p_m) = 2(1-\sqrt{3})$. Две точки условного максимума $\pm p_M = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\cdot\big(1, 1+\sqrt{3}, -1\big)$, $f(\pm p_M) = 2(1+\sqrt{3})$. Две седловые точки $\pm p_s = \pm(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $f(p_s) = 0$.

8 $\frac{9+\sqrt{17}}{2}$ — максимум на сфере; $\frac{9-\sqrt{17}}{2}$ — минимум сфере.

9 $\frac{9\sqrt{5}-15}{\sqrt{50}}$.

10 $\sqrt{2}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

11 а) $C{=}(0,1)$, $V_1{=}(-1,1)$, $V_2{=}(0,0)$, $V_3{=}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — точки минимума;
$S_* \cap E$ — множество точек максимума;
$T_1 = (0, \sqrt{2})$, $T_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}{-}1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $T_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ — седловые точки.
б) T_1, T_2, V_1, V_2, V_3 — точки минимума;
T_3, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{6}, \frac{4+\sqrt{2}}{6}\right)$, $\left(-\frac{2-\sqrt{2}}{6}, \frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)$ — точки максимума.

Список литературы

[1] Арнольд В. И., *Избранное-60.* М.: Фазис, 1997.

[2] Виноградов О. Л., *Математический анализ.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2017.

[3] Виноградов О. Л., Громов А. Л. *Математический анализ. Часть 2.* Санкт-Петербург: издательство СПбГУ, 2012.

[4] Зорич В. А., *Математический анализ. Часть I.* М: МЦНМО, 2002.

[5] Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. *Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных.* Санкт-Петербург: ИЧП "Кристалл", 1994.

[6] Макаров Б. М., Покорытов А. Н., *Гладкие функции и отображения.* М.: МЦНМО, 2020.

Навигатор по тексту